

Some notions of positivity of line bundles : the analytic point of view

Benoît Cadorel * ¹

¹ Institut de Mathématiques de Marseille – Centre National de la Recherche Scientifique : UMR7373,
Ecole Centrale de Marseille : UMR7373, Aix Marseille Université : UMR7373 – France

We will present some basic analytic constructions related to line bundles, and explain how they are related to the positivity notions introduced in F. Lo Bianco's talk.

After introducing the notion of a hermitian metric on a line bundle, we will present standard constructions associated to it, namely, its Chern connection, and its curvature. We will explain how the latter can be used to give a De Rham representative for the first Chern class of the given line bundle. Then, we will present the Kodaira embedding theorem, which states that a line bundle is ample if and only if it admits a metric with positive curvature.

The notion of positivity of the curvature of a metric can be relaxed if we consider this curvature as a distribution. This naturally leads to the notion of plurisubharmonic function, whose basic properties we will briefly describe. These functions take an essential place in the analytic tools we have to study entire curves : actually, on an entire curve, it cannot exist a metric with "sufficiently negative curvature in the sense of distributions". This is the content of the Ahlfors-Schwarz lemma, which we will present at the end of the talk.

Basics on toric varieties: "one ring to rule them all"

Jean-Baptiste Campesato ^{*} ¹, Fabien Priziac ^{*}

1

¹ Institut de Mathématiques de Marseille – Centre National de la Recherche Scientifique : UMR7373,
Ecole Centrale de Marseille : UMR7373, Aix Marseille Université : UMR7373 – France

It will be a mini introduction course on toric varieties divided into two parts. A toric variety is an algebraic variety containing an algebraic torus as an open dense subset such that the action of the torus extends to the whole variety. After giving some easy examples, we will present different equivalent constructions of affine toric varieties: 1) via a parametrization 2) as the zero set of a toric ideal, i.e. a prime ideal spanned by binomials 3) in terms of a finitely generated algebra coming from an affine semigroup.

The combinatorial side of toric varieties will be highlighted in these constructions by the use of two dual lattices, the so called character lattice and lattice of one-parameter subgroups.

Then we will focus on the construction of abstract toric varieties using the combinatorial data of fans, i.e. a collection of cones in the second lattice satisfying some other properties.

The idea is to deduce from such a cone a semigroup in order to construct locally the variety and then to use the above-cited properties of the fan to patch together these charts.

Notice that the torus is included in all of these local charts so that, on the algebraic counterpart, all the data, including the patching one, lie in the ring of Laurent polynomials $\mathbb{C}[x_i^{\pm}]$ (hence the title of this course). Depending on the remaining time, we will finish with the orbits – cones correspondence.

*Speaker

Geometry of curve elements of order 2 on the projective plane, after Semple

Lionel Darondeau * ¹, Camille Plénat ²

¹ KULeuven – Belgium

² Institut de Mathématiques de Marseille – Centre National de la Recherche Scientifique : UMR7373,
Ecole Centrale de Marseille : UMR7373, Aix Marseille Université : UMR7373 – France

In this introductory talk, we will describe the construction by Semple of a "parameter space" of order 2 curvilinear elements on the projective plane in his 1954 paper. This will be an opportunity to motivate the definition of the so-called Semple tower by relating it to classical algebraic geometry, and also to give a quick overview of the questions on which we will be focused during the workshop.

Introduction to algebraic geometry and positivity concepts

Federico Lo Bianco * ¹

¹ Institut de Mathématiques de Marseille – Centre National de la Recherche Scientifique : UMR7373,
Ecole Centrale de Marseille : UMR7373, Aix Marseille Université : UMR7373 – France

In this introductory talk, we review some constructions in classical (i.e. pre-schemes) algebraic geometry; in doing so, we will try to state explicitly the parallels with more familiar topological notions.

We first recall the definition of Zariski topology and of quasi-projective varieties; we will describe in detail the example of Grassmannian varieties.

Next, we introduce the notion of line bundles, and discuss some of the positivity properties of such objects (ampleness, bigness, nefness), as well as the algebraic definition of first Chern class.

Finally, we give the introduction and basic properties of algebraic groups and their representations.

A Brief Introduction to the Geometry of Entire Curves

Juliana Restrepo Velásquez * ¹

¹ Institut de Mathématiques de Marseille – Centre National de la Recherche Scientifique : UMR7373,
Ecole Centrale de Marseille : UMR7373, Aix Marseille Université : UMR7373 – France

In this introductory talk, we give definitions and provide examples motivating the study of the geometry of entire curves, i.e., of non constant holomorphic maps $f: C \rightarrow X$ with values in a given complex

Introduction to the Nash blow-up

Siegfried Van Hille * ¹

¹ KULeuven – Belgium

Following the paper of A. Nobile "*Some Properties Of The Nash Blowing-Up*", I will first define this blow-up. Roughly speaking, it replaces the singular points by the limiting positions of the tangent spaces of nonsingular points. Next we will prove that the Nash blow-up is locally a monoidal transformation. The center of this transform is closely related to the Jacobian ideal. Finally we will show that if X is a variety over an algebraically closed field of characteristic zero, then this blow-up is an isomorphism if and only if X is nonsingular.

*Speaker

Desingularization of curves using Nash blowups

Robin Van Der Veer * ¹

¹ KULeuven – Belgium

In this talk we will prove that a curve over a field of characteristic 0 can be desingularized by a finite sequence of Nash blowups. We give some concrete examples to illustrate this, as well as an example to show that the result fails in positive characteristic.

Geometry of the Semple tower and applications to the Kobayashi conjecture

Jean-Pierre Demailly * ¹

¹ Institut Fourier – Université Grenoble Alpes – France

The lecture will provide an introduction to the geometry of jet bundles and of the Semple tower. Applications include a fundamental vanishing theorem for entire holomorphic curves, and precise cohomology estimates for jet bundles. These imply in their turn that entire curves drawn on varieties of general type have to satisfy certain global algebraic differential equations. As a consequence, we will present a rather direct proof of the Kobayashi conjecture on the hyperbolicity of general hypersurfaces of high degree in projective space.

The Semple tower: a differential approach of curve singularities

Monique Lejeune-Jalabert * ¹

¹ Laboratoire de Mathématiques de Versailles – Université Paris-Saclay, Centre National de la Recherche Scientifique : UMR8100, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines – France

I shall mainly talk on the multiplicity properties of the chains of points in the Semple tower.

Toric geometry and the Semple-Nash modification

Bernard Teissier *¹, Pedro González Pérez *

2

¹ Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche – Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, Université Paris Diderot - Paris 7, Centre National de la Recherche Scientifique : UMR7586 – France

² Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT – Institute of Mathematical Sciences) – Spain

In the first part of these lectures we propose some material towards a theory of general toric varieties without the assumption of normality. Their combinatorial description involves a fan to which is attached a set of semigroups subjected to gluing-up conditions. In particular it contains a combinatorial construction of the blowing up of a sheaf of monomial ideals on a toric variety. In the second part this is used to show that iterating the Semple-Nash modification or its characteristic-free avatar provides a local uniformization of any monomial valuation of maximal rank dominating a point of a toric variety. We describe this result in connexion with the properties of the Zariski-Riemann space in toric geometry.

List of participants

- Budur Nero
- Cadorel Benoit
- Campesato Jean-Baptiste
- Dachs Cadefau Ferran
- Darondeau Lionel
- Hosgood Timothy
- Keller Julien
- Liu Yongqiang
- Lo Bianco Federico
- Mohsen Jean-Paul
- Plenat Camille
- Priziac Fabien
- Restrepo Velasquez Juliana
- Roulleau Xavier
- Rousseau Erwan
- Tran Quang Tue
- Trotman David
- Van Der Veer Robin
- Van Hille Siegfried
- Veys Willem
- Vos Lena
- Wang Haopeng
- Zordan Michele

List of sponsors



Institut Universitaire de France - Erwan Rousseau

Ce projet est centré sur des questions de géométrie complexe dont la clef réside dans des propriétés de positivité de certaines structures géométriques. Cette positivité se traduit en des conséquences géométriques (sur les courbes entières) et arithmétiques (sur les points rationnels). Trois grandes lignes structurent nos travaux sur l'hyperbolicité: 1) Equations différentielles algébriques 2) Théorie des feuilletages holomorphes 3) Structures orbifoldes. 1) Il s'agit d'étudier dans quelle mesure la positivité du fibré canonique influe sur l'existence dans une variété projective de courbes entières devant satisfaire des équations différentielles. 2) Depuis une vingtaine d'années et les travaux de McQuillan, il apparaît crucial de travailler dans le cadre des variétés munies de feuilletages holomorphes et d'étudier le comportement des feuilles paraboliques. 3) Les succès du programme du modèle minimal et les travaux récents de Campana et Miyaoka montrent que l'utilisation d'objets plus subtils (les paires logarithmiques) de la géométrie birationnelle est prometteuse.

Institut de Mathématiques de Marseille



I2M - UMR CNRS 7373

Aix-Marseille Université • CNRS • École Centrale de Marseille

Equipe AGT - Institut de Mathématiques de Marseille.

L'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M, UMR 7373) est une Unité Mixte de Recherche CNRS/Aix-Marseille Université/Centrale Marseille. Il compte environ cent trente enseignants-chercheurs, une trentaine de chercheurs CNRS, une quinzaine de personnels techniques et administratifs, une soixantaine de doctorants et une vingtaine de chercheurs post-doctorants.

L'I2M est issu de la fusion, au 1 janvier 2014, du LATP (Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités) et de l'IML (Institut de Mathématiques de Luminy). Sa structuration scientifique repose sur cinq groupes :

Analyse Appliquée (AA) Arithmétique, Géométrie, Logique et Représentations (AGLR)
Analyse, Géométrie, Topologie (AGT) Mathématiques de l'Aléatoire (ALEA) Géométrie,

Dynamique, Arithmétique et Combinatoire (GDAC) qui couvrent un vaste spectre des mathématiques pures et appliquées, ainsi qu'un grand nombre de domaines d'applications (scientifiques ou industrielles).



Fédération de Recherche des Unités de Mathématiques de Marseille

La FRUMAM est une fédération de recherches en mathématiques (FR 2291 - CNRS) basée sur Marseille et sa région dont les locaux se trouvent sur le Campus de Saint-Charles (Université Aix-Marseille).

La FRUMAM est constituée de laboratoires d'excellence en mathématiques de la région marseillaise et participe à la coordination de la politique scientifique.

L'Institut de Mathématiques de Marseille (I2M - UMR7373 - Marseille) Le Centre de Physique Théorique (CPT - UMR 7332 - Marseille) Le Laboratoire de Mathématiques d'Avignon (LMA - EA 2151 - Avignon) L'Institut de Mathématiques de Toulon et du Var (IMATH - EA 2134 - Toulon) Elle organise des projets transverses aux laboratoires, groupes de travail, journées thématiques et le Colloquium



Laboratoire d'Excellence Archimède

Le projet Archimède a été retenu comme centre d'excellence (Laboratoire d'excellence , LabEx) par le programme national Investissements d'Avenir .

Le LabEx Archimède a pour objectif de :

renforcer les collaborations multidisciplinaires entre unités de recherche, augmenter les échanges internationaux, développer des compétences en transmission et transfert de technologies, améliorer les relations entre la recherche et l'enseignement au sein de l'université.

Il est composé de 4 unités de recherche :

Centre de Physique Théorique (CPT, UMR 7332), Institut de Mathématiques de Marseille (I2M, UMR 7373), Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille (LIF, UMR 7279), Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (LSIS, UMR 7296) et un centre international de conférences :

Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM, UMS 822). Ces unités mixtes de recherche CNRS-Université regroupent des scientifiques reconnus dans le monde et couvrent tous les domaines de recherche en mathématiques et informatique au sein d'Aix-Marseille

Université (AMU)
LISA – Lipschitz Geometry of Singularities

Partenaires: I2M Institut de Mathématiques de Marseille; Laboratoire Paul Painlevé; UNS -
LJAD Université Nice Sophia Antipolis - Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné.

Référence projet : ANR-17-CE40-0023.

Coordinateur du projet : Madame Anne PICHON (Institut de Mathématiques de Marseille).